

数学的な表現を用いて説明する力を育てるための一考察
～伝える活動を取り入れた第3学年「二次方程式」の指導を通して～

1. テーマ設定の理由

本校の生徒は、答えを出すまでの論理的な思考過程よりも、「答えがあっていればいい」と考える傾向がみられ、説明をすることが苦手である。知識・技能は身につけているだけに、説明する力をますます大切にしていかなければいけないと考える。数学的な表現を用いて説明する力を育てるためには、根拠や思考の過程を記述させる問題を提示し、自分なりの表現から筋道を立てた説得力のある表現へと高めるための学習を仕組まなければならない。また、その考えが相手に正確に伝わるかどうかを確かめる必要もある。

そこで本研究では、自分の考え方や解決方法を相手に伝える活動としてとりいれていく。その際、ペアで伝える活動を行い、自分の考え方や解決方法を他者と比べ、自分の考えを問い直し、練り上げる学習の場を設定した授業をつくりあげていきたい。二次方程式の単元において、まずは二次方程式の解を求める際に途中式を書けるだけにとどまらず、一つひとつの手順を行う理由や根拠まで理解し、説明する力を身につけさせたい。さらに文章問題においても説明する力を養いたい。

以上より、数学的な表現を用いて説明する力を育てるために、このテーマ設定とした。

2. 研究の仮説

二次方程式において、伝える活動の中で他者の意見を取り入れ、自分の考えを問い直し、練り上げることで、数学的な表現を用いて説明する力が育つだろう。

3. 研究の内容

- (1) 研究テーマについて
- (2) 事前アンケートの考察
- (3) 検証授業の方法
- (4) 検証授業の内容
- (5) 仮説の検証

4. 結論

- ・「伝える活動」を行うことで、ほとんどの生徒が数学的な表現を用いて説明する力をつけた。
- ・答えを求めるだけでなく、一つひとつの手順を行う理由や根拠まで理解しようとする生徒が増加した。

I 研究テーマ

数学的な表現を用いて説明する力を育てるための一考察
～伝える活動を取り入れた第3学年「二次方程式」の指導を通して～

II テーマ設定の理由

本校の生徒は、答えを出すまでの論理的な思考過程よりも、「答えがあつていればいい」と考える傾向がみられ、説明をすることが苦手である。知識・技能は身につけているだけに、説明する力をますます大切にしていかななくてはならないと考える。数学的な表現を用いて説明する力を育てるためには、根拠や思考の過程を記述させる問題を提示し、自分なりの表現から筋道を立てた説得力のある表現へと高めるための学習を仕組まなければならない。また、その考えが相手に正確に伝わるかどうかを確かめる必要もある。

「中学校学習指導要領解説 数学編」(2017年)では、全国学力・学習状況調査等の結果から、中学校において、「数学的な表現を用いた理由の説明に課題が見られた」と指摘している。さらに、数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動について、「言葉や数、式、図、表、グラフなどを適切に用いて、数量や図形などに関する事実や手続き、思考の過程や判断の根拠などを的確に表現したり、考えたことや工夫したことなどを数学的な表現を用いて伝え合い共有したり、見いだしたことや思考の過程、判断の根拠などを数学的に説明したりする活動」とし、「3学年においては、根拠を明らかにし『論理的に説明し伝え合う』ところまでを視野に入れ、質的な高まりを期待している。」とある。このことから、数学的な表現を用いて説明する活動が求められていることがわかる。

そこで本研究では、自分の考え方や解決方法を相手に伝える活動としてとりいれていく。その際、ペアで伝える活動を行い、自分の考え方や解決方法を他者と比べ、自分の考えを問い直し、練り上げる学習の場を設定した授業をつくりあげていきたい。二次方程式の単元において、まずは二次方程式の解を求める際に途中式を書けるだけにとどまらず、一つひとつの手順を行う理由や根拠まで理解し、説明する力を身につけさせたい。さらに文章問題においても説明する力を養いたい。

以上より、数学的な表現を用いて説明する力を育てるために、このテーマ設定とした。

III 研究の目標

二次方程式において、数学的な表現を用いて説明する力を育てるためには、伝える活動の中で他者の意見を取り入れ、自分の考えを問い直し、練り上げることが有効であることを実践を通して明らかにする。

IV 研究の仮説

二次方程式において、伝える活動の中で他者の意見を取り入れ、自分の考えを問い直し、練り上げることで、数学的な表現を用いて説明する力が育つだろう。

V 研究対象及び研究内容の項目

1 研究対象

君津市立亀山中学校 3 学年 1 学級 合計 6 人

2 研究の単元

「二次方程式」

3 研究内容の項目

- (1) 研究テーマについて
- (2) 事前アンケートの考察
- (3) 検証授業の方法
- (4) 検証授業の内容
- (5) 仮説の検証

VI 研究の内容

1 研究テーマについて

(1) 数学的な表現を用いて説明する力

松元新一郎（『「数学的な表現力」を育成する授業モデル』、明治図書、2009 年）は「数学的な表現とは、単に数学固有の表現でかくこと」「他者と数学的に意思疎通ができること」と述べている。また、「中学校学習指導要領解説数学編」（2017 年）では、数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動について、「言葉や数、式、図、表、グラフなどを適切に用いて、数量や図形などに関する事実や手続き、思考の過程や判断の根拠などを的確に表現したり、考えたことや工夫したことなどを数学的な表現を用いて伝え合い共有したり、見いだしたことや思考の過程、判断の根拠などを数学的に説明したりする活動」としている。

以上より、数学的な表現を用いて説明する力については、数学の用語や言葉、数や式、図、表、グラフなどを用いて問題を解決した過程や手順を行う理由、根拠を記述し他者から理解を得られる力と考える。さらに、書いたものを用いて、他者にわかりやすく口頭で伝える力と考える。本研究では、数学的な表現のうち記述する力を重視したうえで他者と説明する活動を行っていくため、数学的な表現を用いて説明する力を以下のように定義する。

数学的な表現を用いて説明する力の定義

数学の用語や言葉、数や式、図、表、グラフなどを用いて、思考の過程や手順を行う理由、根拠を筋道を立てて記述し、相手に伝える力

(2) 伝える活動

本研究では、ペアで伝える活動を行う。ペアで伝える活動を行うことで期待できる利点として、高木徹（『数学教育 11 月号 No.709』、明治図書、2016 年）は以下の 3 点を述べている。

- (i) 隣の生徒と交替で説明させることで、気軽に説明できる。
- (ii) 説明ができない生徒でも、他の生徒の説明を聞いて、それから説明ができる。

(iii) 全員が説明の練習ができる。

これらに加え、ペアで伝える活動を行うことで他者の考えを聞くことができ、お互いに説明し合いながらも自分の考えをよりよいものにしていけると考えるため、本研究では、以下のことを加える。

(iv) 他者の考えを参考に自分の考えを問い直し、練り上げることができる。

2 事前アンケートの考察

第3学年の生徒の実態

事前アンケート 第3学年（男子3人、女子3人、計6人）

(1 とても思う 2 少し思う 3 あまり思わない 4 思わない)

		S1	S2	S3	S4	S5	S6
①	数学の勉強は大切ですか	2	2	2	2	2	1
②	自分の考えを説明するとき、数学の用語を用いるように意識していますか	1	3	3	3	2	2
③	自分の考えを説明するとき、筋道を立てて説明できていますか	2	3	3	3	3	2
④	自分の考えを説明するとき、理解してもらえるようにわかりやすく説明していますか	2	2	2	2	2	2
⑤	自分の考えや解き方を説明することが得意ですか	2	3	2	4	3	3
⑥	友達の説明で授業の内容がよくわかりますか	2	2	2	3	2	1

事前アンケートでは、「①数学の勉強は大切ですか」の質問に対し、全員が「少し思う」か「とても思う」と答え、数学に対して肯定的な考えを示した。また、「④自分の考えを説明するとき、理解してもらえるようにわかりやすく説明していますか」の質問に対しても、全員が「少し思う」と答え、相手に理解してもらえるようにわかりやすく説明をしようとする態度がみてとれる。また、普段の授業の様子から、計算をしたり、方程式を解いたりする力など、数学的な技能は定着していると考えられる。しかし、「③自分の考えを説明するとき、筋道を立てて説明できていますか」と「⑤自分の考えや解き方を説明することが得意ですか」の質問からわかる通り「説明をする」ことについては、苦手意識をもっている生徒が多い。さらに、「②自分の考えを説明するとき、数学の用語を用いるように意識していますか」の質問に対しても半数が「あまり思わない」と答えている。

また、実際の授業においても、答えはあっているが、自分の考え方や解決方法を上手く説明できない生徒がほとんどである。そのため、第3学年の生徒6人に着目し、得意としている方程式を解く際に、「伝える活動」をとりいれ、数学的な表現を用いて説明する力を育てることを意識して授業を展開した。

3 検証授業の方法

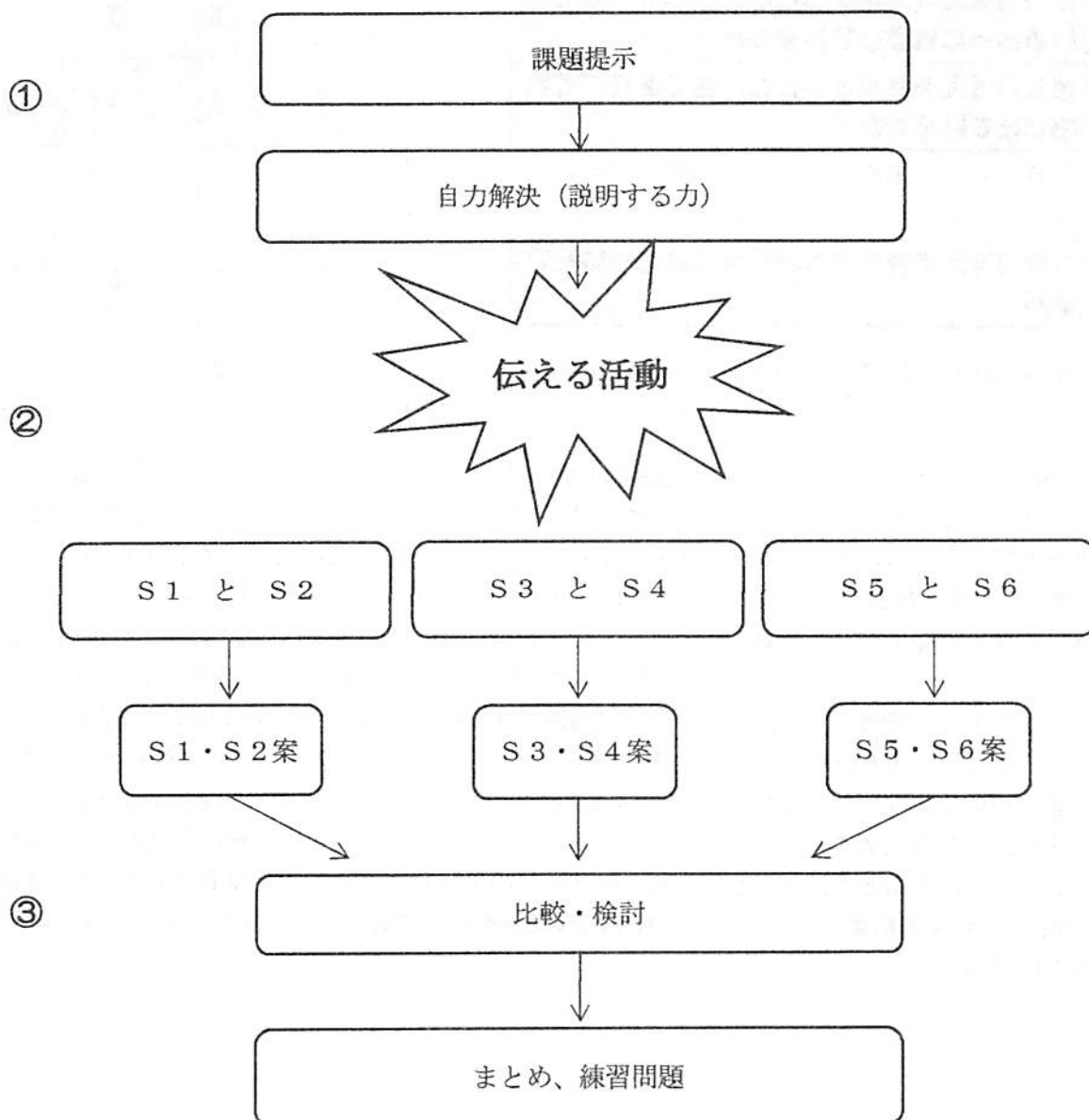
(1) ペアの組み方

無作為に6人を2人組3ペアに分け、検証を行う。

(2) 「伝える活動」の流れ

「伝える活動」の流れ

- ①提示された課題を自力解決し、思考の過程などを記述する。
- ②S1とS2、S3とS4、S5とS6の3ペアに分かれ、活動を行う。
 - i) AとBに分かれる。
 - ii) Aが、①で用いたノートを見せながら、伝える。
 - iii) Bは、ii後、Aの説明に対して、不足している部分を補足したり、ヒントを与えたりする。
 - iv) Aは、Bのアドバイスをもとに自分のノートに朱書きで修正を入れる。
 - v) AとBを入れ替える。
- ③3ペアの説明を比較・検討し、青書きで修正していく。



4 検証授業の内容

(1) 授業計画

時数	授業の内容	伝える活動
第1時	二次方程式の導入、二次方程式とその解	
第2時	$ax^2=b$ 、 $(x+m)^2=n$ の解き方	
第3時	$ax^2+bx+c=0$ の解き方	授業展開 1
第4時	二次方程式の解の公式①	
第5時	二次方程式の解の公式②	授業展開 2
第6時	因数分解を用いた解き方①	
第7時	因数分解を用いた解き方②	
第8時	複雑な方程式の解き方	授業展開 3

(2) 検証授業の様子

【授業展開 1】

「左辺が因数分解できないとき、どのようにして解いたらよいのかわかりやすく説明しよう。」

復習問題

(1) $(x-1)^2=5$ (2) $x^2+10x+25=27$

導入問題

$x^2+6x-1=0$

S 6 先生、この問題解けるんですか？

T どうしてですか？

S 6 左辺を因数分解できないからです。

T 確かにそうですね。でも、この問題は解けます。さあ新たな課題が出てきました。どのように考えていけばよいでしょう。

S 5 いつも通り今までに習ったことを使うといいと思います。

S 2 同じです。

S 1 でも、左辺を2乗の形にできないんじゃない？

T じゃあ、左辺がどんな式だったらいいのかな？

S 3 えーと、 x^2+6x+9 だったら平方完成ができそうだから、無理やり9にしちゃえばいいのか！

S 4 なるほどー。

T みんな見通しがもてたみたいですね。では、これから解いていきますが、それだけでなく、説明も記述していきます。

S 3 えー・・・説明苦手なんだよな。

T 大丈夫。説明する方法を今から全員で確認していくので、安心してください。

『数学的な表現を用いて説明する方法』

- 1、聞き手に説明できるように記述していく。
- 2、最初に方針（思考の過程や判断の根拠など）を述べる。（～ため、～ので）
- 3、数学の用語や言葉、数や式、図、表・グラフなどを用いる。
- 4、途中式ごとに短文で説明を書いていく。
- 5、途中までしか解けなくても説明を書いていく。

（教室に
掲示をする）

T 社会に出ると、自分で考えたことを筋道を立てて相手に伝えることがたくさんあります。例えば、仕事をレポートにまとめて提出したり、自分の提案をプレゼンテーションソフトにまとめて発表したりするときに必要なってくる力になります。ぜひ、この力を数学の授業でもつけていきましょう。

S はい。

T では、先ほどの問題を穴埋め式で解いていきましょう。また、矢印の横に「数学的な表現を用いて説明する方法」を参考に、説明を記述しましょう。

$x^2 + 6x - 1 = 0$	
$x^2 + 6x = 1$	
$x^2 + 6x + \square^2 = 1 + \square^2$	
$(x + \square)^2 = \Delta$	

(自力解決 省略)

T では、次に、ペアで伝える活動を行います。前後でペアを組み、次のように行います。
(p.4『伝える活動』の流れを掲示する。)

<S1とS2のペアの様子>

(S1からS2へ説明 省略)

S2 「 $2 \times \square = 6$ になる3」ってのがわかりにくいのかも。 $\square$ は $6 \div 2$ だから、「6の $\frac{1}{2}$ 」で表すといいんじゃないかな？

S1 たしかに、ありがとう！

T 6という表現は具体的でいいけども、数学の用語や言葉で表せないかな？

S2 あ！「 x の係数」です。

S1 そっか！じゃあ「 x の係数の $\frac{1}{2}$ をたす」と書いておきますね。(省略)

(S2からS1へ説明 省略)

S1 最初の方に「～のため」、「～ので」が入った方がいいんじゃないかな？私は、「平方の公式を使うために」と書いたよ。

S2 たしかに後半しか書いてなかった。それに最後の「 $x =$ の形にするために」も参考にさせてもらうね。(省略)

<比較・検討の様子>

S5 「両辺に x の係数の半分の2乗をたす」の方が、よりよいと思います。

T 「両辺」という言葉がありますが、省略してもいいんじゃないでしょうか？

S6 あった方が丁寧だし、計算ミスが減ると思います。

S2 僕もあった方がわかりやすくいいと思います。(省略)

まとめ

左辺が因数分解できないときは、左辺が平方完成できるように両辺に数(x の係数の $\frac{1}{2}$ の2乗をした数)をたし、 $(x + m)^2 = n$ の形にして解く。

授業展開1のS1のノート

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3 = 1 + 3$$

$$(x + 3)^2 = 10$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

変数の項-1
-1を移項

$\frac{1}{2}$ の2乗
xの係数の半分を両辺にたす。

平方の公式を使いたいのので
2×6=12になる3をたす。

因数分解をする。
x+3は10の平方根なので

x = の形にするために3を移項する

青の記述は比較・検討後に記述

S1のアドバイスからの記述

授業展開1のS2のノート

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3 = 1 + 3$$

$$(x + 3)^2 = 10$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

変数の項-1を移項
-1を移項

平方の公式を使うため
3をたす xの係数の半分をたす。

xの係数6の半分の2乗をたす
両辺に

因数分解
左辺を

x+3は10の平方根なので

3を移項
x = の形にするために3を移項

S2のアドバイスからの記述

【授業展開3】

「複雑な方程式はどのように解いたらよいのだろう。」

導入問題

$$(x+3)^2 + (x+3) = 6$$

T 今まで習ってきた二次方程式と違った形のようにです。何が違うでしょう？

S4 かっこがあります。

S3 複雑でよくわからないです。

T そうですね。では、どのように考えていけばよいでしょう？

S6 今回も今まで習ってきたことを使うといいと思います。

T そうですね。今日までに、自分がどうやって考えたかを筋道を立てて説明しようとしてきました。それらを参考にしながら、今日も説明を加えて解いてみましょう。

S3 先生、どんな解き方でもいいんですか？

T もちろんです。今まで習ってきたことであればどう解いても構いません。

(自力解決 省略)

T では、次に、ペアで伝える活動を行います。今回は様々な考え方があるので、ペアを変えます。置換を用いたS2とS5、因数分解を用いたS1とS3、解の公式を用いたS4とS6に分かれてください。(省略)

T 3つの発表が終わりましたが、どの考えがよりよいのでしょうか？

- S 2 置換がいいと思います。気付けば簡単に答えがでるからです。
- S 5 私は置換でやったんですけど、上手くいなくて余計に難しくなってしまったので、因数分解で解く方がわかりやすかったです。
- S 4 私はやっぱり解の公式が好きなので、解の公式でやろうと思います。それにどんな問題でも解けるのでいいと思います。
- S 3 でも計算が面倒で計算ミスしない？
- S 4 たしかにそれは他と比べるとありそう。
- T みんなそれぞれの考えがもてたみたいですね。では、置換を行った S 2 と S 5 は置換できそうになかったらどうしようか？
- S 5 展開をして $ax^2 + bx + c = 0$ の形をつくりまます。それからどうしようか考えると思います。
(省略)

まとめ

- ・式を $ax^2 + bx + c = 0$ の形にしてから、左辺を因数分解できないか考える。できなければ、解の公式（平方完成）を使う。
- ・置換ができれば、工夫して解く。

5 仮説の検証

(1) S 1 の変容

事前調査

$$(x+3)^2 - 2x(x+3) \text{ を因数分解しなさい。}$$

$$= x^2 + 6x + 9 - 2x^2 - 6x$$

$$= -x^2 + 9 \quad \text{になる。}$$

「計算の手順を説明しなさい」という問題であったが、展開や分配法則、同類項といった数学の用語を用いていない。途中式も間違っており、答までだどりついていない。

授業展開 1

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = 10$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

変数の項 -1
-1 を移項

$\frac{1}{2}$ の 2 乗
x の係数の半分を両辺にたす。

平方の公式を使うために
2 × 3 = 6 になる 3 をたす。x の係数の ± をたす。

因数分解をする。
x + 3 は 10 の平方根なので

x = の形にするために 3 を移項する

「x の係数の $\frac{1}{2}$ をたす」という考えから、両辺に 3 をたしていたが、全体の比較・検討の際に青書きで「x の係数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗を両辺にたす」と加えた。その後の練習問題では、間違えずにできている。

授業展開3

$$\begin{aligned}
 (x+3)^2 + (x+3) &= 6 \\
 x^2 + 6x + 9 + x + 3 &= 6 \\
 x^2 + 7x + 6 &= 0 \\
 (x+6)(x+1) &= 0 \\
 x &= -6, -1 \\
 \text{A. } x &= -6, -1
 \end{aligned}$$

$ax^2+bx+c=0$ の形にするため
 左辺の $(x+3)$ を括弧でまとめる
 右辺の 6 を左辺に移す
 因数分解する
 $A \times B = 0$ ならば $A=0$ または $B=0$ になる
 $x+6=0$ のとき $x=-6$
 $x+1=0$ のとき $x=-1$

「かっこをはずす」という表現を書いていたものの、「伝える活動」の際に「展開する」と朱書きすることができた。また、それ以外は数学の用語を用いて、思考の過程、理由や根拠などを的確に表現することができている。

事後調査

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 6 &= 2(x-1) \\
 x^2 - 4x - 2x + 6 + 2 &= 0 \\
 x^2 - 6x + 8 &= 0 \\
 (x-4)(x-2) &= 0 \\
 x-4=0 \text{ のとき } x &= 4 \\
 x-2=0 \text{ のとき } x &= 2 \\
 \text{A. } x &= 4, 2
 \end{aligned}$$

を解きなさい。
 $ax^2+bx+c=0$ の形にするため
 右辺を展開して左辺に移す
 まとめる
 因数分解する
 $A \times B = 0$ ならば $A=0$ または $B=0$ になる

筋道を立てて説明することができている。また、事前調査に比べて数学の用語を多く使っている。

(2) 事前・事後アンケートの比較

(1 とても思う 2 少し思う 3 あまり思わない 4 思わない)

		S1		S2		S3		S4		S5		S6	
		前	後	前	後	前	後	前	後	前	後	前	後
①	数学の勉強は大切ですか	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
②	自分の考えを説明するとき、数学の用語を用いるように意識していますか	1	1	3	2	3	2	3	2	2	2	2	2
③	自分の考えを説明するとき、筋道を立てて説明できていますか	2	2	3	2	3	2	3	2	3	2	2	2
④	自分の考えを説明するとき、理解してもらえるようにわかりやすく説明していますか	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
⑤	自分の考えや、解き方を説明することが得意ですか	2	2	3	2	2	2	4	3	3	2	3	2
⑥	友達の説明で授業の内容がよくわかりますか	2	2	2	2	2	2	3	2	2	1	1	1

事後アンケートでは、「③自分の考えを説明するとき、筋道を立てて説明できていますか」に対して、「少し思う」と全員が答えた。「⑤自分の考えや解き方を説明することが得意ですか」に対しては、S4も「思わない」から、「あまり思わない」に1つあがり、残り5人が「少し思う」を選んだ。③、⑤の質問とも6人中4人の評価が上がっている。また、「②自分の考えを説明するとき、数学の用語を用いるように意識していますか」に対しては、事前アンケートで「あまり思わない」と選んでいた3人が「少し思う」を選んでいる。

③、⑤の質問に対して「とても思う」と答える生徒がいなかった理由として、「文章問題になるとまだ不安になる」「二次方程式はできるようになってきたが、証明問題もできるかわからない」と感想に書いており、本單元だけで数学的な表現を用いて説明する力を身に付けさせるには不十分であり、他の單元でも継続して伝える活動を行う必要があると考えられる。

VII 成果と課題

(1) 成果

- 「伝える活動」を行うことで、ほとんどの生徒が数学的な表現を用いて説明する力をつけた。
- 答えを求めるだけではなく、一つひとつの手順を行う理由や根拠まで理解しようとする生徒が増加した。
- 一つひとつの手順を確認していくため、計算間違いが減少した。

(2) 課題

- △生徒の感想では、「文章問題になるとまだ不安になる」「二次方程式はできるようになってきたが、証明問題もできるかわからない」などがあり、本單元だけでは数学的な表現を用いて説明する力がついたとは言いきれない。他の單元も継続して行う必要がある。
- △「伝える活動」を行う時間と回数を十分に確保することができなかった。今後継続するためには、年間計画を見直す必要がある。

VIII 引用・参考文献

- ・中学校学習指導要領解説 数学編（2017年）
- ・『『数学的な表現力』を育成する授業モデル』、柏元新一郎、明治図書、2009年
- ・「数学教育11月号 No.709号」、高木徹、明治図書、2016年

資料編

- 1 生徒の変容
- 2 授業を受けた感想
- 3 伝える活動の様子

資料 1) 生徒の変容

< S 1 の変容 >

授業展開 2

$$x^2 + x + 1 = 2(x + 3)$$

$$x^2 + x + 1 = 2x + 6$$

$$x^2 + x - 2x + 1 - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

右辺を計算する
展開する

右辺を左辺に移項する
解の公式を使いたいので
 $ax^2 + bx + c = 0$ の形にするため
同類項で計算する

解の公式にあてはめる
代入
 $a=1, b=-1, c=-5$

計算する

約分も簡単にすることもできないので答えは $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

< S 2 の変容 >

事前調査

$x^2 + 10x + 25 - 2x(x + 5)$ を因数分解しなさい。

$$= M^2 - 2xM$$

$$= M(M - 2x)$$

$$= (x + 5)(-x + 5)$$

授業展開 1

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = 10$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

移の項 -1 を移項
-1 を移項

平方の公式を使うため
 3^2 をたす x の係数の $\frac{1}{2}$ をたす
 x の係数 6 の $\frac{1}{2}$ の 2 乗を $\frac{1}{2}$ をたす
因数分解
左辺を

$x + 3$ は 10 の平方根なので

3 を移項
 $x = \bullet$ の形にするために 3 を移項

授業展開 3

$$\begin{aligned}
 (x+3)^2 + (x+3) &= 6 \\
 M^2 + M &= 6 \quad \left\{ \begin{array}{l} x+3 \text{ を } M \text{ とし} \\ x+3 \text{ を } M \text{ に置換する} \end{array} \right. \\
 M^2 + M - 6 &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{因数分解をしたいので、} ax^2+bx+c=0 \text{ の形} \\ \text{にするために右辺の項を左辺に移す項} \end{array} \right. \\
 (M+3)(M-2) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{因数分解} \\ M \text{ を} \\ x+3 \text{ にもどす} \end{array} \right. \\
 (x+3+3)(x+3-2) &= 0 \\
 (x+6)(x+1) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{からこの中を計算する} \\ A \times B = 0 \text{ ならば } A=0, \text{ または } B=0 \text{ なのだ} \end{array} \right. \\
 x+6=0 \text{ のとき } x &= -6 \\
 x+1=0 \text{ のとき } x &= -1 \\
 x &= -1, -6
 \end{aligned}$$

事後調査

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 6 &= 2(x-1) \quad \text{を解きなさい。} \\
 x^2 - 4x + 6 &= 2x - 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \text{ の形にしたいので} \\ \text{右辺を左辺} \end{array} \right. \\
 x^2 - 6x + 8 &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{右辺の項を左辺に移す項} \\ \text{右辺を因数分解} \end{array} \right. \\
 (x-4)(x-2) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A \times B = 0 \text{ ならば } A=0 \text{ または } B=0 \text{ なのだ} \end{array} \right. \\
 x-4=0 \text{ のとき } x &= 4 \\
 x-2=0 \text{ のとき } x &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x+5)^2 - 3x(x+5) &= 0 \quad \text{を解きなさい。} \\
 M^2 - 3xM &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x+5 \text{ を } M \text{ に置換する} \\ \text{共通因数で因数分解} \end{array} \right. \\
 M(M-3x) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M \text{ を } x+5 \text{ にもどす} \\ \text{からこの中を計算する} \end{array} \right. \\
 (x+5)(x+5-3x) &= 0 \\
 (x+5)(-2x+5) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A \times B = 0 \text{ ならば } A=0 \text{ または } B=0 \text{ なのだ} \end{array} \right. \\
 x+5=0 \text{ のとき } x &= -5 \\
 -2x+5=0 \text{ のとき } x &= \frac{5}{2} \\
 x &= -5, \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

< S 3 の変容 >

事前調査

$x^2 + 10x + 25 - 2x(x+5)$ を因数分解しなさい。

$$(x+5)^2 - 2x(x+5)$$

$$M^2 - 2xM$$

$$M(-2x)$$

$$x+5(-2x)$$

授業展開 1

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$$

$$(x+3)^2 = 10$$

$$x+3 = \pm\sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

数の項 + 定数項

-1 を移す項

$\frac{1}{2}$ の係数
x の係数の半分たす

平方の公式の形にするために 3 をたす

左辺を因数分解し、右辺をたす

まとめる

展開する

移す項

+3 を移す項

x の形にするために

授業展開 3

$$(x+3)^2 + (x+3) = 6$$

$$x^2 + 6x + 9 + x + 3 = 6$$

$$x^2 + 7x + 12 - 6 = 0$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(x+6)(x+1) = 0$$

$$x+6 \text{ のとき } x = -6$$

$$x+1 \text{ のとき } x = -1$$

左辺を展開する

$a(x+b)(x+c) = 0$ の形にして
因数分解するために、右辺の数の項を移す

因数分解する

$A \times B = 0$ ならば、 $A = 0$ 、 $B = 0$ のいずれ

$x+6$ のとき $x = -6$ 、 $x+1$ のとき $x = -1$

になる

事後調査

$$x^2 - 4x + 6 = 2(x - 1) \quad \text{を解きなさい。}$$

左辺を分配法則で
 $x^2 - 4x + 6 = 2x - 2$
 右辺を移項する
 $x^2 - 6x + 8 = 0$
 $(x-4)(x-2)$
 $x-4$ のとき $x=4$
 $x-2$ のとき $x=2$
 $Ax=4, 2$

右辺を分配法則で
 $ax+bx+c=0$ の形に直す
 右辺を移項する
 $Ax+B=0$ のとき $A=0$ または $B=0$ のとき $x=0$ のとき
 $x=4, x=2$ のとき $x=2$

<S4の変容>

事前調査

$$x^2 + 10x + 25 - 2x(x + 5) \quad \text{を因数分解しなさい。}$$

$$x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - 10x$$

$$= -x^2 + 25$$

$$= -(x^2 - 25)$$

$$= -(x + 5)(x - 5)$$

計算する

授業展開 1

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = 10$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

-1 を移項。
 数の項 -1
 平方の公式にするために、
 数を見つけてみる。
 平方の公式で作った面・たし算
 因数分解
 たしをはずし、根号をつける。
 $x + 3$ は 10 の平方根なので
 $+3$ を移項
 $x =$ の形にするために
 具体的には!!
 2乗を両辺にたす。平方の公式が使える。

授業展開 3

$$(x+3)^2 + (x+3) = 6$$

$$x^2 + 6x + 9 + x + 3 = 6$$

$$x^2 + 7x + 12 = 6$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

展開 (左辺)

$ax^2 + bx + c = 0$
の形にすると $a=1, b=7, c=6$ となる
よって

解の公式に $a=1, b=7, c=6$ を代入

計算する

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-7 + 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = \frac{-7 - 5}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

計算

答: $x = -1, x = -6$

事後調査

$$x^2 - 4x + 6 = 2(x-1)$$

$$x^2 - 4x - 2x = -2 - 6$$

$$x^2 - 6x = -8$$

$$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$$

$$(x-3)^2 = 1$$

$$x-3 = \pm 1$$

計算する。左辺の 6 を右辺に移項し、
右辺の $2x$ を左辺に移項して。

まとめる

x の係数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗をして、両辺に下す。
平方の公式が使える。

平方の公式に代入。

$a=1$ を用いて計算する。

答: $x = 4, x = 2$

$(x+5)^2 - 3x(x+5) = 0$ を解きなさい。 $a x^2 + b x + c = 0$ に対する
 $x^2 + 10x + 25 - 3x^2 - 15x = 0$ 左辺を展開する
 $-2x^2 - 5x + 25 = 0$ 解の公式に $a = -2, b = -5, c = 25$ を代入する

$$\frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times (-2) \times 25}}{2 \times (-2)}$$
計算して

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 + 200}}{-4}$$

$$x = \frac{5 + 15}{-4} = -5 \quad x = \frac{5 - 15}{-4} = \frac{5}{2}$$
答 $x = -5, x = \frac{5}{2}$

< S 5 の変容 >

事前調査

$x^2 + 10x + 25 - 2x(x+5)$ を因数分解しなさい。
 $x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - 10x$ ① 全て展開をする
 $= -x^2 + 25$ ② 数をまとめる
 $= -(x+5)(x-5)$ ③ $-(x^2 + 25)$ とみて
 因数分解をする

授業展開 1

$x^2 + 6x - 7 = 0$
 $x^2 + 6x = 7$
 $x^2 + 6x + 9 = 10$
 $(x+3)^2 = 10$
 $x+3 = \pm \sqrt{10}$
 $x = -3 \pm \sqrt{10}$

数の項
 -7 を移項
 平方の公式を
 使うために
 両辺に x の係数の半分の二乗を加える
 左辺を因数分解
 両辺を平方根にする
 の形になる
 -3 を右辺に移項する
 (x の形にする)

$x+3$ は 10 の平方根なので
 $x+3 = \pm \sqrt{10}$ になる

授業展開 2

$$x^2 + x + 1 = 2(x + 3)$$

↓ 右辺を展開する

$$x^2 + x + 1 = 2x + 6$$

↓ 項を左辺に移項する 解の公式を使いたいのを $ax^2 + bx + c$ の形にするため

$$x^2 - x - 5 = 0$$

↓ 解の公式に

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2} \quad a=1 \quad b=-1 \quad c=-5 \text{ を } \underline{\text{あてはめる}}$$

↓ かんたんにする (計算)

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

代入

授業展開 3

$x+3$ を M とおく

$$(x+3)^2 + (x+3) = 6$$

↓ $x+3$ を M に置換する

$$M^2 + M = 6$$

↓ 左辺の共通因数をくくり出す

$$M(M+1) = 6$$

M を $x+3$ とする

$$(x+3)(x+3+1) = 6$$

↓ $ax^2 + bx + c$ の形にするため

$$x^2 + 7x + 12 = 6$$

↓ 展開する

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

↓ 6 を移項する

↓ 因数分解をする

$$(x+1)(x+6) = 0$$

↓ $A \times B = 0$ ならば $A=0$ または $B=0$ なのを

↓ $x+1=0$ のとき $x=-1$

↓ $x+6=0$ のとき $x=-6$

$$x = -1, -6$$

事後調査

$$x^2 - 4x + 6 = 2(x-1) \quad \text{を解きなさい。}$$

↓ 右辺を展開する

$$x^2 - 4x + 6 = 2x - 2$$

↓ $ax^2 + bx + c$ の形にするため

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

↓ 項を左辺に移項, 同類項をまとめる

↓ 因数分解をする

$A \times B = 0$ ならば $A=0$ または $B=0$ なのを

$$(x-4)(x-2) = 0$$

↓ $x-4=0$ のとき $x=4$

↓ $x-2=0$ のとき $x=2$

$$x = 4, 2$$

< S 6 の変容 >

事前調査

$x^2 + 10x + 25 - 2x(x + 5)$ を因数分解しなさい。

まずは展開します。

$$x^2 + 10x + 25 - 2x^2 - 10x = \underline{x^2 - 25} \text{ になります。}$$

5 と 5 の 25 です。

$(x + 5)(x - 5)$ になります。

授業展開 1

$$x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$x^2 + 6x = 1$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = 1 + 3^2$$

$$(x + 3)^2 = 10$$

$$x + 3 = \pm \sqrt{10}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}$$

数の項

← -1 を移項する

平方の公式に $x^2 + 6x + 3^2$ に x の数の $\frac{1}{2}$ の 2 乗をたす

← 3^2 をたす

← 左辺を因数分解する

← 平方根の形になおす

← $x = \square$ の形にするために

← 3 を移項する

授業展開 3

$$(x + 3)^2 + (x + 3) = 6$$

$$x^2 + 7x + 12 = 6$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ の形にするために

← 左辺を展開します。

← 右辺の項を左辺に移項します。

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

解の公式に $a=1, b=7, c=6$ を代入して計算します。

事後調査

$x^2 - 4x + 6 = 2(x - 1)$ を解きなさい。

$x^2 - 4x - 2x + 6 + 2 = 0$ $\leftarrow a x^2 + b x + c = 0$ の形にするために右辺を展開し、左辺に移項

$x^2 - 6x + 8 = 0$ $\leftarrow$ かんたんにする

$(x - 4)(x - 2) = 0$ $\leftarrow$ 因数分解

$\leftarrow A \times B = 0$ なら $A = 0$ or $B = 0$ になるので

$x - 4 = 0$ のとき $x = 4$

$x - 2 = 0$ のとき $x = 2$

A. $x = 4, 2$

資料 2) 授業を受けた感想

S 1

数学用語を使うことを意識するようになった。

自分と違う意見が出た時に新しい考え方ができる。

問題によって解き方を工夫できるようになった。

S 2

分からない問題があったら、聞いて、教えてもらえ

問題の解き方のレパートリーが増えた

今までは説明してもなかなか相手につたらなかったが、数学用語が使えるようになってからは説明出来るようになった

S 3

相談したり、相手のよい所を真似したりしながら楽しく学習できた。

途中式をきちんと書いて数学用語の使い方を覚えた。

「～のために」という言葉を知らず引き出しが増えた

相手に伝わりやすい言葉を選ぶようになった。

嫌な問題は解けるかわからない。

S 4

ペアで練習など学習を通して、言葉の使い方がわかるようになりました。
 前の授業で使った用語を使える事が出来、数学术語の使い方がうまくなった。
 また、相手に伝わりやすく説明が出来るようになりました。

S 5

自分で思いつかない用語が出てきたときにマネしようと思った。
 「～のために」が入るとわかりやすくなった。
 自分から説明できる事によって計算ミスが減った・見直しに良い。
 友達にスマートに説明出来ると思う。用語を覚識して使えるようになった。

S 6

たくさんの意見が聞け式の説明を細かく説明
 することができました。
 計算ミスが少なくなりました。

資料 3) 伝える活動の様子

